Lycée Alphonse Daudet HKBL 2020-2021

Révisions pour la rentrée
à faire pour la rentrée de septembre

Afin de débuter au mieux l'année d'Hypokhâgne en mathématiques, il est nécessaire de maîtriser les techniques de calculs et un certain nombre de méthodes, aussi je vous demande d'effectuer pendant vos vacances le travail suivant :

- Revoir les notions et résultats rappelés ci-dessous (ceux-ci doivent être connus **par coeur** pour la rentrée)

- Effectuer les exercices donnés tout au long du polycopié ci-dessous. Ils seront corrigés à la rentrée.

Je vous souhaite à tous de bonnes vacances,

Mme Bozon

I. Les fractions

On ne va pas donner ici toutes les règles qui régissent le calcul avec des fractions, mais rappeler quelques formules.
Attention ! On ne divise jamais par 0. L'expression $\frac{a}{0}$ n'a pas de sens.
Soient a, b, c des réels tels que ces fractions soient bien définies, alors :

$$\boxed{\frac{0}{a}=0 \qquad \frac{a}{1}=a \qquad \frac{a}{-b}=\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b} \qquad \frac{a}{b}=a\frac{1}{b} \qquad \frac{1}{\frac{a}{b}}=\frac{b}{a} \qquad \frac{\frac{a}{b}}{c}=\frac{a}{b}\frac{1}{c}=\frac{a}{bc}}$$

Exercice 1. :Calculer $\frac{\frac{4}{7}}{8}$ et $\frac{4}{\frac{7}{8}}$

II. Les identités remarquables

On rappelle que :

$$\boxed{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \qquad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2 \qquad a^2-b^2=(a-b)(a+b)}$$

Exercice 2. : Montrer que

$$2\frac{x}{3x-1}-\frac{x-1}{3x+1}=\frac{3x^2+6x-1}{9x^2-1}$$

III. Les puissances

Soit x, y des réels non nuls et n, m des entiers.

$$\boxed{x^n\times x^m=x^{n+m} \qquad (x\times y)^n=x^n\times y^n \qquad x^{-n}=\frac{1}{x^n} \qquad (x^n)^m=x^{n\times m} \qquad \frac{x^n}{x^m}=x^{n-m}}$$

Exercice 3. :Compléter $x^{100}\times x^2=$.......... $\frac{x^{10}}{x^3}=$............ $x^{12}\times y^{12}=$............ $x^{-10}=$............ $(x^2)^{15}=$............

IV. Les racines carrées

Soit x, y des réels positifs ou nuls.

$$\boxed{(\sqrt{x})^2=x \qquad \sqrt{xy}=\sqrt{x}\sqrt{y} \qquad \sqrt{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}, y\neq 0}$$

Exercice 4. : 1. Ecrire $\sqrt{32}$ avec le plus petit nombre entier sous la racine.
2. Ecrire les nombres suivants sans racine au dénominateur : $\frac{3}{\sqrt{5}}$; $\frac{1}{\sqrt{3}-1}$.
3.Réduire les expressions $A=(\sqrt{5}-3)^2$, $B=(\sqrt{5}+\sqrt{6})^2$

V. Les inégalités

Soient x, y, a trois nombres réels. Alors :

1. Si $x \leq y$ alors $x + a \leq y + a$. (*on peut ajouter ou soustraire un même nombre aux deux membres d'une inégalité*)
2. Si $x \leq y$ et $a \geq 0$ alors $ax \leq ay$. (*on peut multiplier les deux membres d'une inégalité par un même nombre positif*)
3. Si $x \leq y$ et $a \leq 0$ alors $ax \geq ay$. (*multiplier par un même nombre négatif les deux membres d'une inégalité renverse le sens de l'inégalité*)

Exercice 5. :
Soit a un réel tel que $-1 \leq a < 2$. Déterminer un encadrement de $5 - 3a$ et de $\frac{a}{2} - 4$.

VI. Les équations

1. Les équations du type $A \times B = 0$ ou $\frac{A}{B} = 0$.

Très souvent, on essaie de ramener une équation à une équation produit du type $A \times B = 0$ ou à un équation quotient du type $\frac{A}{B} = 0$ et on utilise les propriétés suivantes :

$$\boxed{A \times B = 0 \iff A = 0 \text{ ou } B = 0 \qquad \frac{A}{B} = 0 \iff A = 0 \text{ et } B \neq 0}$$

Exercice 6. Résoudre $ax = 2a$ où a est un nombre réel fixé.

Exercice 7. Résoudre $\frac{2x+1}{x-1} = 1$.

2. Les équations du type $x^2 = a$

Les solutions de l'équation $x^2 = a$ sont :

- Si $a < 0$: pas de solution
- Si $a = 0$: une solution : 0
- Si $a > 0$: deux solutions : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$

Exercice 8. : Résoudre $x^2 + 1 = 0$ et $x^2 - 9 = 0$.

NB : $$x^2 = y^2 \iff x = y \text{ ou } x = -y$$

3. Les équations du second degré du type $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$

Soient a, b et c trois nombres réels tels que $a \neq 0$. On cherche les solutions réelles de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Le **discriminant** de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est le nombre noté Δ défini par $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$.

- si $\Delta < 0$: pas de solution réelle.
- si $\Delta = 0$: une solution réelle : $-\frac{b}{2a}$
- si $\Delta > 0$: deux solutions réelles : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Exercice 9. : Résoudre $4x^2 - 4x + 1 = 0$ et $x^2 - 3x + 2 = 0$.

VII. Les inéquations

1. Les inéquations du type $A \times B \geq 0$ ou $\frac{A}{B} \geq 0$.

Très souvent, on essaie de ramener une inéquation à une inéquation produit du type $A \times B \geq 0$ ou à un inéquation quotient du type $\frac{A}{B} \geq 0$ et on utilise la propriété suivante :

Le produit ou le quotient de deux nombres de même signe est positif et le produit ou le quotient de deux nombres de signe est négatif

Pour de telles inéquations, on est souvent amené à établir un tableau de signes.

Exercice 10. Résoudre $\frac{x-3}{2x-3} < 0$ et $\frac{2x-2}{x+3} \leq 1$.

2. Les inéquations du type $x^2 \geq a$

Les solutions de l'équation $x^2 \geq a$ sont :

- Si $a \leq 0$: l'ensemble des nombres réels est solution
- Si $a > 0$: l'ensemble des solutions est : $]-\infty, \sqrt{a}] \cup [\sqrt{a}, +\infty[$

Exercice 11. : Résoudre $x^2 - 2 \leq 0$.

3. Signe de $ax^2 + bx + c \geq 0$ avec $a \neq 0$

- si $\Delta \leq 0$: le signe de $ax^2 + bx + c$ est constant pour tout x réel, du signe de a.
- si $\Delta > 0$: on a si $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$:

signe de a	x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$a > 0$	signe de $ax^2 + bx + c$		$+$	|	$-$	|	$+$	
$a < 0$	signe de $ax^2 + bx + c$		$-$	|	$+$	|	$-$	

Exercice 12. : Résoudre $x^2 - 2x - 3 > 0$ et $x^2 - 3x + 2 \leq 0$.

VIII. Les fonctions

1. Définitions

On munit le plan d'un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

On dit que f est une **fonction numérique** d'une variable réelle s'il existe un ensemble I de $\mathbb{R}$ tel que chaque

nombre $x \in I$ possède une *unique* image $f(x)$ qui soit un nombre réel. On note alors : $\begin{array}{rccc} f: & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$

L'ensemble I est appelé **l'ensemble de définition** de f. Il est noté $\mathcal{D}_f$.

L'ensemble des points du plan de coordonnées $(x, f(x))$, où $x \in \mathcal{D}_f$, est la **courbe représentative** de f notée $\mathcal{C}_f$.

2. Propriétés remarquables

b. Monotonie

- f est **croissante** (resp. strictement croissante) sur I si : pour tous x_1, x_2 dans I, si $x_1 \leq x_2$ alors $f(x_1) \leq f(x_2)$
(resp. pour tous x_1, x_2 dans I, si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) < f(x_2)$)

- f est **décroissante** (resp. strictement décroissante) sur I si : pour tous x_1, x_2 dans I, si $x_1 \leq x_2$ alors $f(x_1) \geq f(x_2)$
(resp. pour tous x_1, x_2 dans I, si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) > f(x_2)$)

3. La fonction logarithme népérien notée ln.

1. La fonction ln est définie sur $]0, +\infty[$
2. Pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ et $\ln(1) = 0$.
3. $\ln :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et strictement croissante
4. $\ln(a) < \ln(b) \iff a < b$ et $\ln(a) = \ln(b) \iff a = b$
5. $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$, $\ln(\frac{1}{b}) = -\ln(b)$, $\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$,
$\ln(a^n) = n\ln(a)$, n entier naturel.
6. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$

Exercice 13. Exprimer en fonction de $\ln(2)$: $A = \ln(32) - 3\ln(1/2)$.

4. La fonction exponentielle notée exp

1. La fonction exp est définie sur $\mathbb{R}$
2. Pour tout $x > 0$, $\exp(\ln x) = x$ et pour tout x réel $\ln(\exp x) = x$.
3. $\exp(0) = 1$ et $\exp(1) = e \simeq 2,71$.
4. exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp'(x) = \exp(x)$.
5. $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow]0, +\infty[$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
6. $\exp(a) < \exp(b) \iff a < b$ et $\exp(a) = \exp(b) \iff a = b$
7. $\exp(a)\exp(b) = \exp(a+b)$, $\exp(-b) = \frac{1}{\exp(b)}$, $\exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$, $\exp(na) = [\exp(a)]^n$, n entier naturel.
8. $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$

5. Les dérivées

Dérivées usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	I (intervalle de dérivabilité)
$x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$
$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$-nx^{-(n+1)} = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$]0, +\infty[$

Formules de dérivation

$(u+v)' = u' + v'$	$(\lambda u)' = \lambda u', \lambda \in \mathbb{R}$
$(uv)' = u'v + v'u$	$(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

Exercice 14. Calculer les dérivées des fonctions suivantes, en précisant l'ensemble sur lesquelles ces dernières sont définies et dérivables :

1. $f : x \mapsto x^2 + 2x - 1 + \ln(x)$
2. $f : x \mapsto \frac{2}{x^2+x+1}$
3. $f : x \mapsto x \ln x - x$
4. $f : x \mapsto \frac{\sqrt{x}(2x-2)}{\ln(x)}$