Les exercices comportant une * sont à rédiger et renvoyer

Exercice 1.

Déterminer la limite des suites suivantes lorsque n tend vers $+\infty$:

1. $u_n = \frac{n^2+1}{n^2-1}$ 2. $u_n = \frac{2^n+3^n}{3^n-2^n}$ 3. $u_n = \frac{e^n+2n+2}{\ln n + 3^n}$

4. $u_n = \frac{\ln(n^2+1)}{\ln n + 1}$ 5. $u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 3$ 6. $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!}$

* Exercice 2.

Limite de la suite u définie par : $\forall n \in N, \; u_n = (v_n)^n$ lorsque $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 1$

1. Montrer que, pour tout x > 0, $x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(x+1) \leq x$
2. En déduire la limite des suites :

(a) $u_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$, n >0 (b) $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, n > 0 (c) $u_n = \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$, n > 0

Conclusion ?

Suites Classiques

Exercice 3.

Pour chacune des suites $(u_n)_{n\in N}$ suivantes, déterminer le terme général u_n ainsi que l'expression de $\sum_{k=0}^{n} u_k$

1. $u_3 = 3$, et $u_{n+1} = u_n + 4$. 2. $u_2 = 12$, et $u_{n+1} = 2.u_n$.
3. $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ 4. $u_0 = 1$, $u_1 = 0$, et $u_{n+2} = 4\,u_{n+1} - 4\,u_n$

Exercice 4. Emprunt et suite arithmético-géométrique.

Une personne contracte un emprunt d'une valeur C >0, au taux mensuel r > 0, en remboursant chaque mois une mensualité d'un montant de m ¡>0. On note u_n la somme restant à rembourser l'année n. On a donc $u_0 = C$, et $\forall n \in N, u_{n+1} = (1+r)u_n - m$

1. Déterminer le terme général de la suite u $=(u_n)_{n\in N}$
2. Montrer que si $\frac{m}{r} \leq C$ alors le prêt n'est jamais remboursé (c'est-à-dire $u_n > 0$ pour tout $n \in$ N).
3. Montrer que si $\frac{m}{r} > C$, alors le prêt est remboursé (= il existe n tel que $u_n \leq 0$). Déterminer le nombre de mois nécessaires au remboursement du capital de départ.
4. Une personne souhaite rembourser son prêt en $N \in \mathbb{N}$ mois exactement. Déterminer alors le montant de ses mensualités m en fonction de C, N et r.

Exercice 5

On note, pour tout $n \in$N, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n}$

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in N}$ et $(v_n)_{n\in N}$ convergent vers une limite commune.

Primitives et intégrales

Exercice 6 *

On considère la fonction numérique f : $f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^4+1}} dt$

1. Déterminer l'ensemble de définition de D_f
2. Etudier la dérivabilité de f . Calculer f '(x) et en déduire les variations de f.

Exercices de synthèse

- **Exercice 7 ***

On considère la fonction φ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(x) = \frac{2}{x} + \ln(x)$

On définit la suite (u_n) par : $u_0 = 3/2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \varphi(u_n)$

1. Étudier les variations de φ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. On donne $\varphi(3/2) \approx 1,73$ et $\varphi(2) \approx 1,69$; Montrer que $\varphi([3/2 ; 2]) \subset [3/2 ; 2]$.

3. En étudiant les variations de φ', montrer que : $\forall x \in [3/2 ; 2]$, $|\varphi'(x)| \leq 2/9$.

4. Montrer qu'il existe un unique réel x_1 solution de l'équation $x = \varphi(x)$.

5. Montrer successivement que pour tout entier n :

$\frac{3}{2} \leq u_n \leq 2$; $|u_{n+1} - x_1| \leq \frac{2}{9}|u_n - x_1|$; $|u_n - x_1| \leq (\frac{2}{9})^n$.

6. En déduire la limite de la suite.

Exercice 8

On considère la fonction f déterminée sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = x + 1 + \dfrac{x - 1 + \ln x}{x^2}$

On se propose dans cet exercice d'étudier la fonction f et de la représenter relativement à un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$, l'unité choisie étant le cm.

Etude d'une fonction g auxiliaire.

Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$ $g(x) = x^3 - x + 3 - 2\ln x$

1. Soit P la fonction polynôme déterminée par $P(x) = 3x^3 - x - 2$.

a. Prouver que P est factorisable par $x - 1$.

b. Ecrire $P(x)$ sous la forme d'un produit de $x - 1$ par un polynôme $Q(x)$ que l'on déterminera.

c. Déterminer alors le signe de $P(x)$ sur $\mathbb{R}$.

2. Vérifier que la fonction dérivée g' peut s'écrire : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$ $g'(x) = \dfrac{P(x)}{x}$

3. En déduire les variations de g sur son domaine d'étude.

4. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$ $g(x) > 0$

Etude de la fonction f.

1. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives. Que peut-on en déduire pour la représentation graphique de f, notée C_f ?

2. a. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque que x tend vers $+\infty$.

b. Déterminer la limite de f(x) - (x+1) en $+\infty$. On appellera (Δ) la droite d'équation $y = x + 1$

c. Montrer que sur $[1,+\infty[$, la courbe C_f est au-dessus de la droite (Δ).

3. **a.** Vérifier que la fonction dérivée f' peut s'écrire : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$ $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$

b. En déduire les variations de f.

c. On donne le tableau de valeurs suivant :

x	0,5	3
$f(x)$	$-3,3$	$4,3$

Donner l'allure de C_f et tracer la droite (Δ).

d. Hachurer la partie du plan comprise entre C_f, (Δ) et les deux droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.

e. Ecrire, à l'aide d'une intégrale, la valeur de l'aire de la partie hachurée du plan.

f. A l'aide d'une intégration par parties, déterminer la valeur de cette intégrale.

Devoirs de vacances : SCILAB en analyse ou probabilités

Rédiger et renvoyer au moins un exercice sur les 3 exercices d'analyse (A1, A2 ou A3) et un exercice sur les 2 de probabilités (P1, P2).

Exercice A1

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(x) = \dfrac{x\ln(x) - 1}{x}$

I. Étude des zéros de φ.

1. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives.
   Interpréter graphiquement cette limite.
2. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, ainsi que la limite de $\dfrac{\varphi(x)}{x}$ lorsque x en vers $+\infty$.
   Interpréter graphiquement cette limite.
3. Justifier la dérivabilité de φ sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer sa dérivée.
4. Dresser le tableau de variation de φ en faisant apparaitre les limites de φ en 0^+ et $+\infty$.
5. Prouver l'existence d'un unique réel $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\varphi(\alpha) = 0$. Justifier que $\alpha \in [1; e]$.

II. Étude d'une suite réelle.

On considère la suite u définie par la relation de récurrence suivante : $\begin{cases} u_0 &= e \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} &= \varphi(u_n) + u_n \end{cases}$

1. Démontrer que pour tout entier n, u_n existe et $u_n > \alpha$.
2. Si cette suite est convergente de limite L, que peut valoir L ?
3. Prouver que la suite u est strictement croissante.
4. La suite u est-elle convergente ?
5. Soit A un réel. Recopier et compléter le programme suivant afin qu'il affiche le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant A$

```
program ecricome2013;

 function y = g(x )
y = ..................................................
endfunction
A= input('entrer un réel A >0')
u =exp(1)
n =0
while ..........................................

......................................
......................................
endwhile
disp(......................... )
```

Exercice A2

On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par la donnée de $u_0 = 0$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 1}{2}$.

1. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
   (b) Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Déduire des questions précédentes que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.
2. (a) Écrire une fonction Scilab qui renvoie la valeur de u_n.
   (b) En déduire un programme, Scilab, qui permet de déterminer et d'afficher la plus petite valeur de n pour laquelle on a $0 < 1 - u_n < 10^{-3}$.

Exercice A3

Pour tout entier n non nul, on note h_n la fonction définie sur $\mathbf{R}^{+*}$ par :

$$\forall x > 0 \qquad h_n(x) = x^n + 1 + \frac{1}{x^n}$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, la fonction h_n est strictement décroissante sur $]0,1][$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[$.
2. En déduire que pour tout entier n non nul, l'équation : $\quad h_n(x) = 4 \quad$ admet exactement deux solutions, notées u_n et v_n et vérifiant : $0 < u_n < 1 < v_n < 3$.
3.
   (a) Écrire une fonction `Scilab` d'en-tête `function y=h(n,x)` qui renvoie la valeur de $h_n(x)$ lorsqu'on lui fournit un entier naturel n non nul et un réel $x \in \mathbf{R}^{+*}$ en entrée.

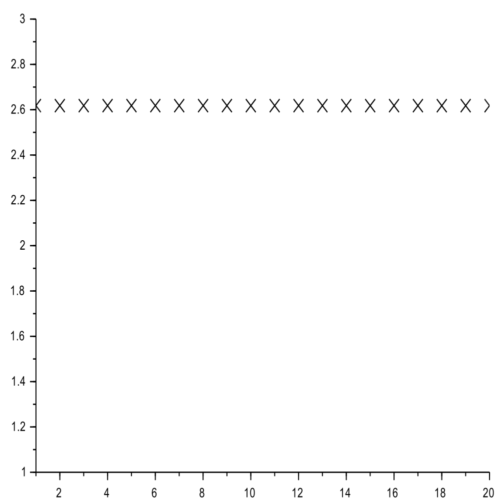
   (b) Compléter la fonction suivante pour qu'elle renvoie une valeur approchée à 10^{-5} près de v_n par la méthode de dichotomie lorsqu'on lui fournit un entier $n \geq 1$ en entrée :

```
function res=v(n)
    a=1
    b=3
    while (b-a)>10^(-5)
        c=(a+b)/2
        if h(n,c) <4 then ........
            else ........
        end
     end
     ..........
endfunction
```

   (c) À la suite de la fonction `v`, on écrit le code suivant :

```
X=1:20
Y=zeros(1,20)
for k=1:20
    Y(k)=v(k)^k
end
plot2d(X,Y,style=-2,rect=[1,1,20,3])
```

   À l'exécution du programme, on obtient la sortie graphique suivante :



   Expliquer ce qui est affiché sur le graphique ci-dessus.
   Que peut-on conjecturer ?

   (d) Montrer que : $\quad \forall n \geq 1, \qquad (v_n)^n = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

   (e) En déduire la convergence et la limite de la suite $(v_n)_{n\geq 1}$

Exercice P1

On dispose d'une urne contenant au départ 1 boules blanches et (3) boules noires.
On dispose également d'une réserve infinie de boules blanches et de boules noires.
Pour tout entier naturel j, on dit que l'urne est dans l'état j lorsqu'elle contient j boules blanches et $(j+2)$ boules noires.
Au départ, l'urne est donc dans l'état 1.
On réalise une succession d'épreuves, chaque épreuve se déroulant selon le protocole suivant :
Pour tout entier naturel j non nul, si l'urne est dans l'état j, on extrait une boule au hasard de l'urne.

• Si l'on obtient une boule blanche, alors cette boule n'est pas remise dans l'urne et on enlève de plus une boule noire de l'urne, l'urne est.alors dans l'état $(j-1)$.

• Si l'on obtient une boule noire, alors cette boule est remise dans l'urne et on remet en plus une boule blanche et une boule noire dans l'urne l'urne est alors dans l'état $(j+1)$.

1. on note X_1 la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches encore présentes dans l'urne après la première épreuve et X_2 la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches encore présentes dans l'urne après la deuxième épreuve.
   On admet que X_1 et X_2 sont définies sur un certain espace probabilisé $(\Omega; \mathscr{A}; P)$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.
   (a) Donner la loi de X_1.
   (b) Utiliser la formule des probabilités totales pour déterminer la loi de X_2 .
   (c) Simulation informatique de l'expérience aléatoire décrite ci-dessus.

   Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire décrite dans cet exercice et pour qu'il affiche les valeurs des variables aléatoires X_1 et X_2 .

```
Program simul
tirage = floor(4*rand())
if tirage == 0 then X1 =____. . .else X1 = _______ end
if (X1 == 0) then X2 =___________
else tirage = floor(6* rand())
if (tirage <= 1) then X2 =__________ else X2 =__________end
end
disp (X1 , X2)
```

Exercice P2

On dispose d'une pièce de monnaie amenant Pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et Face avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

Partie I : Étude d'une première variable aléatoire

On effectue une succession de lancers avec cette pièce et on définit la variable aléatoire X prenant la valeur du nombre de Face obtenus avant l'obtention du deuxième Pile.

1. (a) Décrire les événements $[X=0]$, $[X=1]$, $[X=2]$ puis calculer leurs probabilités.
   (b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, P[X=n]=(n+1)\frac{4}{3^{n+2}}$.

Partie II : Étude d'un jeu

Dans cette partie, p désigne un réel de $]0;1[$.
Deux individus A et B s'affrontent dans un jeu de Pile ou Face dont les régles sont les suivantes :

- le joueur A dispose d'une pièce amenant Pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et lance cette pièce jusqu'é l'obtention du deuxiéme Pile ; on note X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus ;
- le joueur B dispose d'une autre pièce amenant Pile avec la probabilité p et lance cette pièce jusqu'à l'obtention d'un Pile ; on note Y la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus ;

– Le joueur A gagne si son nombre de Face obtenus est inférieur ou égal à celui de B ; sinon c'est le joueur B qui gagne.

On dit que le jeu est équilibré lorsque les joueurs A et B ont la même probabilité de gagner.

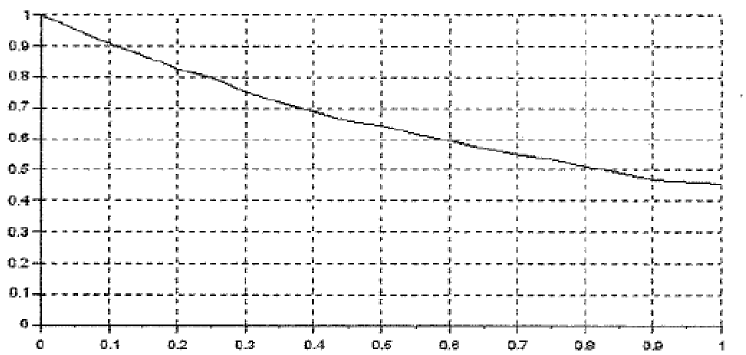
1. **Simulation informatique**

   (a) Écrire une fonction Scilab d'en-téte `function x = simule_X()` qui simule la variable aléatoire X.

   (b) On suppose que l'on dispose d'une fonction simule_Y qui, prenant en argument un réel p de $]0;1[$, simule la variable aléatoire Y. Expliquer ce que renvoie la fonction suivante :

```
function r = mystere(p)
r = 0
N = 10^4
 for k = 1:N
x = simule_X()
y = simule_Y(p)
if x <= y then
r = r + 1/N
end
end
endfunction
```

   (c) On trace, en fonction de p, une estimation de la probabilité que A gagne et on obtient le graphe suivant :



   À la vue de ce graphe, conjecturer une valeur de p pour lequel le jeu serait équilibré.

Devoir de vacances - Algèbre

Le premier exercice (au moins) est à rédiger pour le 20 Août.

Exercice 1. ★

On considère dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ les quatre matrices suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$
   (a) Quelle est la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
   (b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
2. (a) Calculer le produit de matrices $(A - I)(A - 2I)$ et en déduire que $A^2 - 3A + 2I = O$.
   (b) Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et de I.
   (c) Donner la matrice A^{-1}
3. (a) Déterminer les réels a et b tels que $A = aI + bB$.
   (b) Calculer B^2.
4. (a) Montrer, par récurrence sur n, qu'il existe deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout entier naturel n, $A^n = a_nI + b_nB$, où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient les relations
   $a_0 = 1, \quad b_0 = 0$, et pour tout entier naturel n : $\begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = 2b_n + a_n \end{cases}$
   (b) Quelle est la nature de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
   (c) En déduire que pour tout entier naturel n, $A^n = I + (2^n - 1)B$.
   (d) La relation est-elle encore vraie pour $n = -1$?

Exercice 2. On considère les matrices carrées d'ordre trois :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Partie I : Réduction de A

1. Est-ce que A est inversible ?
2. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
3. Montrer que $A = PDP^{-1}$.

Partie II : Résolution de l'équation $M^2 = A$

On se propose de résoudre l'équation (1) : $M^2 = A$, d'inconnue M, matrice carrée d'ordre trois. Soit M une matrice carrée d'ordre trois. On note $N = P^{-1}M\ P$.

1. Montrer : $\qquad M^2 = A \Longleftrightarrow N^2 = D$.
2. Établir que, si $N^2 = D$, alors $N\ D = D\ N$.
3. En déduire que, si $N^2 = D$, alors N est diagonale.
4. Déterminer toutes les matrices diagonales N telles que $N^2 = D$.
5. En déduire la solution B de l'équation (1) telle que $P^{-1}BP$ soit une matrice diagonale avec des coefficients diagonaux positifs ou nuls.

Partie III : Intervention d'un polynôme

1. Montrer qu'il existe un polynôme Q de degré deux, et un seul, que l'on calculera, tel que :
$$Q(0) = 0, \quad Q(1) = 1, \quad Q(4) = 2.$$
2. En déduire : $-\frac{1}{6}A^2 + \frac{7}{6}A = B$. (La matrice B a été définie en **II.5.**)
3. Montrer, pour toute matrice carrée F d'ordre trois :
$$A\,F = F\,A \Longleftrightarrow B\,F = F\,B.$$

Exercice 3. Dans cet exercice, on étudie l'exponentielle d'une matrice pour une matrice carrée d'ordre 3, puis d'ordre 2.

Partie A : Exponentielle d'une matrice carrée d'ordre 3.

Soient A et P les matrice définies par :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la matrice P est inversible et déterminer P^{-1}
2. On pose $T = P\,A\,P^{-1}$.
   (a) Calculer la matrice T
   (b) Calculer T^2, T^3, puis T^n pour out entier naturel $n \geqslant 3$.
3. En déduire que :
$$\forall n \geqslant 3, \quad A^n = 0$$
   où 0 désigne la matrice nulle d'ordre 3.
4. Pour tout réel t, on définit la matrice $E(t)$ par :
$$E(t) = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2$$
   où I désigne la matrice unité (identité) d'ordre 3.
   (a) Montrer que :
$$\forall (t, t') \in \mathbb{R}^2, \quad E(t)\,E(t') = E(t + t')$$
   (b) Pour tout t réel, calculer $E(t)\,E(-t)$. En déduire que la matrice $E(t)$ est inversible et déterminer son inverse en fonction de $I,\ A,\ A^2,\ t$.
   (c) Pour tout t réel et pour tout entier naturel n, déterminer $[E(t)]^n$ en fonction de $I,\ A,\ A^2,\ t$ et n.

Partie B : Exponentielle d'une matrice carrée d'ordre 2.

Soient B, D et Q les matrices définies par :
$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Pour tout entier naturel n non nul, et pour tout réel t, on définit la matrice $E_n(t)$ par :
$$E_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}B^k \text{ que l'on note } E_n(t) = \begin{pmatrix} a_n(t) & c_n(t) \\ b_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix}$$

1. Montrer que Q est inversible et déterminer Q^{-1}.
2. Montrer que $Q^{-1}BQ = D$.

3. Pour tout entier naturel n, montrer que :
$$B^n = \begin{pmatrix} 2-2^n & 1-2^n \\ 2^{n+1}-2 & 2^{n+1}-1 \end{pmatrix}$$
4. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2t^k - (2t)^k}{k!}$$
exprimer de même $b_n(t)$, $c_n(t)$, $d_n(t)$ sous le forme d'une somme.
5. Déterminer les limites de $a_n(t)$, $b_n(t)$, $c_n(t)$, $d_n(t)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
6. Pour tout t réel, on pose alors :
$$E(t) = \begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to+\infty} a_n(t) & \lim\limits_{n\to+\infty} c_n(t) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} b_n(t) & \lim\limits_{n\to+\infty} d_n(t) \end{pmatrix}$$
   (a) Montrer que
$$E(t) = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{2t} & e^t - e^{2t} \\ 2e^{2t} - 2e^t & 2e^{2t} - e^t \end{pmatrix}$$
   (b) Déterminer les matrices E_1 et E_2, telles que pour tout t réel on ait :
$$E(t) = e^t E_1 + e^{2t} E_2$$
   (c) Calculer E_1^2, E_2^2, E_1E_2, E_2E_1.
   (d) En déduire que pour tout t réel, $E(t)$ est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 4. On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre trois à éléments réels, I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, 0 la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On considère, pour toute matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, les ensembles $E_1(A)$ et $E_2(A)$ suivants :
$$\begin{aligned} E_1(A) &= \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})\,; AM = M\} \\ E_2(A) &= \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})\,; A^2M = AM\} \end{aligned}$$

Partie I

1. Montrer que $E_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
   On admettra que $E_2(A)$ est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
2. (a) Établir : $E_1(A) \subset E_2(A)$
   (b) Montrer que, si A est inversible, alors $E_1(A) = E_2(A)$
3. (a) Établir que, si $A - I$ est inversible, alors $E_1(A) = \{0\}$
   (b) Un exemple : Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_1(B)$ et $E_2(B)$

Partie II

On considère les matrices $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
2. Vérifier que $C = PDP^{-1}$.
3. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On note $N = P^{-1}M$.
   Montrer : $M \in E_1(C) \Longleftrightarrow N \in E_1(D)$.

4. Montrer que $N \in E_1(D)$ si et seulement s'il existe trois réels $a,\ b,\ c$ tels que $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
5. En déduire l'expression générale des matrices de $E_1(C)$ et déterminer une base de $E_1(C)$.
6. Donner l'expression générale des matrices de $E_2(C)$ et déterminer une base de $E_2(C)$.
   Est-ce que $E_1(C) = E_2(C)$?

Devoirs de vacances - Probabilités

Le premier exercice (au moins) est à rédiger pour le 20 Août.

Exercice 1. ★

On s'intéresse dans cet exercice à l'étude de trois jeux présents dans une fête foraine.

1. **Premier jeu**
   Pour ce premier jeu de hasard, la mise pour chaque partie est de 1 euro. L'observation montre qu'une partie est gagnée avec la probabilité $\frac{1}{10}$, perdue avec la probabilité $\frac{9}{10}$. Toute partie gagnée rapporte 3 euros. Les différentes parties sont indépendantes. Une personne décide de jouer N parties ($N \geq 2$). On note X_N la variable aléatoire représentant le nombre de parties gagnées et Y_N la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur.

   (a) Donner la loi de X_N ainsi que la valeur de l'espérance et de la variance de cette variable.

   (b) Exprimer Y_N en fonction de X_N. En déduire la valeur de l'espérance et de la variance de Y_N.

   (c) On suppose dans cette question que $N = 50$. Déterminer la probabilité que le joueur perde 20 euros.

2. **Deuxième jeu**
   Pour ce deuxième jeu, le participant lance trois fléchettes dans une cible circulaire de centre O et de rayon 1. Pour $1 \leq i \leq 3$, on note X_i la variable aléatoire égale à la distance du point d'impact de centre O de la $i^{ème}$ fléchette. Ces trois variables aléatoires X_1, X_2, X_3 de même loi, mutuellement indépendantes, sont des variables à densité dont une densité f est définie par :
   $$f(x) = \begin{cases} 4x^3 & \text{si} \quad x \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
   Le joueur gagne si la distance la plus proche du centre O se trouve à une distance inférieure à $\frac{1}{5}$ de ce centre. Enfin, on note M la variable aléatoire représentant la plus petite des trois distances X_1, X_2, X_3.

   Deux variables aléatoires quelconques sont indépendantes si pour tous intervalles I et J, on a : $P((X \in I) \cap (Y \in J)) = P(X \in I)P(Y \in J)$. On a la généralisation analogue au cas discret pour définir n variables aléatoires mutuellement indépendantes.

   (a) Vérifier que f est une densité de probabilité et déterminer la fonction de répartition F de X_i.

   (b) Déterminer l'espérance de X_i.

   (c) Exprimer l'événement $[M > t]$ à l'aide des événements $[X_1 > t], [X_2 > t], [X_3 > t]$ pour tout réel t.

   (d) Déterminer la fonction de répartition F_M de M et montrer que M est une variable à densité et en donner une densité notée f_M.

   (e) Quelle est la probabilité de l'événement $G =$"le joueur gagne la partie" ?

3. **Troisième jeu**
   Pour ce dernier jeu, le participant effectue des tirages avec remise dans une urne contenant une proportion b de boules blanches et r de boules rouges avec $0 < b < 1$, $0 < r < 1$ et $b + r = 1$. Le gain étant fonction du nombre de lancers nécessaires à l'obtention du second changement de couleur, on étudie les variables aléatoires X, égale au nombre de lancers nécessaires à l'obtention du premier changement de couleur, puis Y, égale au nombre de lancers nécessaires à l'obtention du second changement de couleur.

(a) Préciser $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.

(b) Montrer (à l'aide d'événements bien choisis) que pour tout entier k supérieur ou égal à 2 : $P(X=k) = b^{k-1}r + r^{k-1}b$

(c) Montrer que X admet une espérance et que $E(X) = \frac{1}{r} + \frac{1}{b} - 1$.

(d) Pour tout entier $k \geqslant 2$ et $j \geqslant 3$, déterminer $P((X=k) \cap (Y=j))$.

(e) Déterminer alors la loi de Y.

Exercice 2. On considère X est une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p, avec $p \in]0;1[$ et Y est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ, avec $\lambda \in]0;+\infty[$.

On note $q = 1-p$.

On suppose que X et Y sont indépendantes, c'est à dire :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0;+\infty[, \quad \mathrm{P}(X=k \cap Y \leq t) = \mathrm{P}(X=k)\,\mathrm{P}(Y \leq t)$$

1. Rappeler une densité de Y ainsi que son espérance.
2. On définit la variable aléatoire Z par $Z = \dfrac{Y}{X}$.

   (a) Montrer : $\quad \forall t \in [0;+\infty[, \quad \mathrm{P}(Z > t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X=k)\,\mathrm{P}(Y > tk)$

   (b) En déduire : $\quad \forall t \in [0;+\infty[, \quad \mathrm{P}(Z > t) = \dfrac{pe^{-\lambda t}}{1-qe^{-\lambda t}}$

   (c) Montrer que la variable aléatoire Z admet une densité et déterminer une densité de Z.

Exercice 3. PARTIE I : Un jeu en ligne

La société Lehazard met à la disposition de ses clients un nouveau jeu en ligne dont la page d'écran affiche une grille à trois lignes et trois colonnes.

Après une mise initiale de 2 euros du joueur, une fonction aléatoire place au hasard successivement trois jetons (★) dans trois cases différentes. La partie est gagnée si les trois jetons sont alignés. Le gagnant empoche 10 fois sa mise, ce qui lui rapporte 18 euros à l'issue du jeu. Dans le cas contraire la mise initiale est perdue par le joueur.

	A	B	C
1	★		
2	★		
3		★	

On définit les événements H, V, D, N par :

— H : « les trois jetons sont alignés horizontalement ».
— V : « les trois jetons sont alignés verticalement ».
— D : « les trois jetons sont alignés en diagonale ».
— N : « les trois jetons ne sont pas alignés ».

1. Justifier qu'il y a 84 positionnements possibles des trois jetons dans les trois cases.
2. Déterminer les probabilités $\mathrm{P}(H)$, $\mathrm{P}(V)$, $\mathrm{P}(D)$ des événements $H, .V, .D$.
3. En déduire que la probabilité de l'événement N est égale à :

$$\mathrm{P}(N) = \frac{19}{21} \simeq 0.9048$$

4. La société peut s'attendre à 10 000 relances par jour de ce jeu.
   (a) Pour chaque entier naturel i non nul. on note Z_i le gain de la société à la $i^{ème}$ relance. Calculer l'espérance mathématique $E(Z_i)$ de Z_i .
   (b) Quel gain journalier Z la société peut-elle espérer ?

PARTIE II. Cas de joueurs invétérés.

1. Un joueur décide de ,jouer 100 parties consécutives que l'on suppose indépendantes.
   (a) Donner la loi de la variable aléatoire X égale au nombre de parties gagnées.
   (b) Indiquer l'espérance et la variance de X.
   (c) Exprimer la perte T du joueur en fonction de X.
2. Quel nombre minimum n de parties devrait-il jouer pour que la probabilité de gagner au moins une partie soit supérieure ou égale à 50% ? (On admettra que $\ln\left(\frac{19}{21}\right) \simeq -0,1$ et $\ln(2) \simeq 0,7$)
3. Un autre joueur décide de jouer et de miser tant qu'une partie n'est pas gagnée . On note Y la variable aléatoire égale au nombre de parties jouées pour gagner la première fois.
   (a) Donner la loi de la variable aléatoire Y .
   (b) Indiquer l'espérance et la variance de Y.
   (c) Pour tout entier naturel k, montrer que la probabilité p_k que le joueur joue au plus k parties avant de gagner pour la première fois, est donnée par la formule :
   $$p_k = 1 - \left(\frac{19}{21}\right)^k$$

PARTIE III. Contrôle de la qualité du jeu.

On constate que, parfois, la fonction aléatoire est déréglée. Dans ce cas, elle place le premier jeton dans la case $(A,1)$, les deux autres étant placés au hasard dans les cases restantes. On note Δ l'événement « la fonction aléatoire est déréglée »et on pose $\mathrm{P}(\Delta) = x$ avec $x \in]0,1[$.

1. Calculer les probabilités conditionnelles $\mathrm{P}_\Delta(H)$, $\mathrm{P}_\Delta(V)$, $\mathrm{P}_\Delta(D)$ des événements H, V, D sachant l'événement Δ.
2. Utiliser la formule des probabilités totales avec le système complet d'événement $\left(\Delta, \overline{\Delta}\right)$ pour en déduire que la probabilité les jetons ne soient pas alignés est égal à :
   $$\mathrm{P}(N) = -\frac{x}{84} + \frac{19}{21}$$
3. Soit G la variable aléatoire égale au gain réalisé par la société de jeu lors d'une partie jouée. Déterminer la valeur maximale de x pour que l'espérance de gain soit positive.
4. On joue une partie. On constate que les jetons sont alignés. Quelle est la probabilité, en fonction de x, que la fonction aléatoire ait été déréglée ?

Exercice 4.

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O

Au départ, le mobile est à l'origine.

Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n, alors, à l'instant $(n+1)$ il sera sur le point d'abscisse $(k+1)$ avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $1-p$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n et l'on a donc $X_0 = 0$.

On admet que, pour tout n de $\mathbb{N}$, X_n est définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$.

Par ailleurs, on note T l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ).

Par exemple, si les abscisses successives du mobile après son départ sont 0, 0, 1, 2, 0, 0, 1, alors on a $T = 1$. Si les abscisses successives sont : 1, 2, 3, 0, 0, 1, alors on a $T = 4$.

On admet que T est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$

1. (a) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, exprimer l'événement $(T = k)$ en fonction d'événements mettant en jeu certaines des variables X_i.
   (b) Donner la loi de X_1.
   (c) En déduire $\mathrm{P}(T = k)$ pour tout k de $\mathbb{N}^*$, puis reconnaître la loi de T.
2. (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $X_n(\Omega) = [[0, n]]$
   (b) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, utiliser le système complet d'événements $(X_{n-1} = k)_{0 \leq k \leq n-1}$ pour montrer que : $\mathrm{P}(X_n = 0) = 1 - p$
3. (a) Établir que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \{1, 2, \dots n+1\},\ \mathrm{P}(X_{n+1} = k) = p\,\mathrm{P}(X_n = k - 1)$
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \{0, 1, 2 \dots, n-1\},\ \mathrm{P}(X_n = k) = p^k(1-p)$.
   En déduire également la valeur de $\mathrm{P}(X_n = n)$. Donner une explication probabiliste de ce dernier résultat.
   (c) Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(X_n = k) = 1$.
4. (a) Montrer que pour tout entier naturel n : $E(X_{n+1}) = pE(X_n) + p$.
   (b) Déterminer l'expression de $E(X_n)$ en fonction de n et de p. On pourra poser $u_n = E(X_n)$.