CPES
Nom :

Samedi 24 septembre 2016
2 heures

**MATHS – SPECIALITE : CONTROLE N°1**
**L'USAGE DE LA CALCULATRICE N'EST PAS AUTORISE**

**Exercice n°1 :** ( 6 points ) **1°** Résoudre dans $]-\pi;+\pi]$ :

**a)** $\cos(x) \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ **b)** $\sin(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**2°** Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$ :

**a)** $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$, **b)** $\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

**Exercice n°2 :** ( 3 points ) Exprimer simplement à l'aide de $\sin x$ et $\cos x$ les expressions suivantes:

$$A = \sin(5\pi + x) - \cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) + \sin(7\pi + x) - \cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right).$$

$$B = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right).$$

**Exercice n°3 :** ( 2,5 points )

**a)** Calculer $\sin(x)$ sachant que $\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et que $x \in [-\pi;0]$.

**b)** Calculer $\cos(2x)$ sachant que $\sin(x) = \frac{3}{4}$.

**Exercice n°4 :** ( 3,5 points ) **a)** En remarquant que $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$, donner les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

**b)** En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

**Exercice n°5 :** ( 3,5 points ) **1°** Démontrer les relations :

$$\cos(x+y)\cos(x-y) = \cos^2 x - \sin^2 y,$$

$$\sin(x+y)\sin(x-y) = \sin^2 x - \sin^2 y.$$

**2°** En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de $\sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$

**Exercice n°6 :** ( 2,5 points ) En utilisant $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, calculer $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$. Déduisez-en la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$, puis de $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

**Exercice n°7 :** ( Bonus ) En utilisant les formules d'addition du sinus et du cosinus , montrer que :

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}.$$