CPES
Nom :

Vendredi 10 mars 2016
4 heures

# CONTROLE N°5 : CONCOURS BLANC

**L'USAGE DE LA CALCULATRICE N'EST PAS AUTORISE**

*La présentation, la lisibilité, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une par importante dans l'appréciation des copies.*

**Exercice n°1 :** ( 3 points ) Soient $P$ et $Q$ les deux polynômes définis par : $P(X) = X^2 + 1$ et $Q(X) = 2X^4 - 5X^3 - X^2 - 5X - 3$.

**1°** Exprimer chacun des polynômes suivants : $P^2(X)$ , $P\left(X^2\right)$ , $P \circ Q$ ( que vous ne développerez pas).

**2° a)** Effectuer la division euclidienne de $Q(X)$ par $P(X)$.

**b)** En déduire toutes les solutions dans $\mathbb{R}$ de $Q(X) = 0$.

**Exercice n°2 :** ( 3,5 points ) **1° a)** Montrer que $1$ est racine double du polynôme $P$ avec $P(X) = X^{n+2} - X^n - X^2 + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

**b)** Quel est le reste de la division euclidienne de $P$ par $(X-1)^2$ ?

**2°** Quel est le reste de la division euclidienne de $P$ par $(X+1)^2$ ?

**Exercice n°3 :** ( 6,5 points ) **1°** On considère les fonctions $f_1$ , $f_2$ et $f_3$ , définies par :

$$f_1(x) = \frac{3x-2}{x+1} \quad , \quad f_2(x) = 2x^2 + 7x - 5 \quad \text{et} \quad f_3(x) = \sqrt{\frac{3x+2}{-2x+5}}.$$

**a)** Déterminer les ensembles de définition des fonctions $f_1$ , $f_2$ , $f_3$ et $f_1 \circ f_2$.

**b)** Donner l'expression de $f_1 \circ f_2(x)$.

**2°** On considère la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{3x}{x^2+4}$ .

**a)** Etudier les variations de $g$ sur $\mathbb{R}$.

**b)** Donner un intervalle $I$ pour que $g : \mathbb{R} \to I$ soit une surjection.

**c)** Montrer que $g : [-2;2] \to \left[-\frac{3}{4};\frac{3}{4}\right]$ est bijective et déterminer $g^{-1}$.

**Exercice n°4 :** ( 3 points ) Soit $f$ la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Conjecturer l'expression de $\underbrace{\left(f \circ f \circ f \circ ... \circ f\right)}_{n\ fois}(x)$ en fonction de $x$ et de $n$, puis démontrer votre conjecture par récurrence.

**Exercice n°5 :** ( 5 points ) **1°** Exprimer plus simplement, en fonction de $n$, les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{k=n} 5 \times \frac{3^{k-2}}{2^{2k}} \qquad\qquad S_2 = \sum_{k=3}^{k=n} (5k-4)$$

**2° a)** Montrer que $\dfrac{k-1}{k\left(k^2-1\right)} = \dfrac{-2}{k-1} + \dfrac{5}{k} + \dfrac{-3}{k+1}$, pour tout entier $k \geq 2$.

**b)** En déduire la valeur de $S = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{k-5}{k\left(k^2-1\right)}$ , pour tout entier $n \geq 2$

T-S-V-P

**3°-** a) Recopier et compléter l'égalité suivante : $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} + .......$

**b)** Montrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ , $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$.

**Exercice n°6 :** ( 4 points ) **1°-** Déterminer les limites suivantes :

**a)** $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{x}$ **b)** $\lim_{x \to 1} \frac{2x-2}{3x^2-2x-1}$.

**2°-** On considère la fonction $f$ définie par : $f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - x$.

**a)** Déterminer la limite de $f(x)$ en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour sa courbe représentative?

**b)** Montrer que la droite d'équation $y = -2x - \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe représentative de $f$ au voisinage de $-\infty$.

**Exercice n°7 :** ( 5 points ) On considère la fonction $f$ définie sur $[-1;3]$ par :

$f(x) = (x+1)\sqrt{3+2x-x^2}$.

On note $f$ ' sa fonction dérivée et ( $\mathscr{C}$ ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé

( O ; $\vec{i}, \vec{j}$)

**1°-a)** Calculer $\lim_{h \to 0^+} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$, que peut-on en déduire pour la dérivabilité de $f$ en -1? Que peut-on dire de la tangente à ( $\mathscr{C}$ ) au point d'abscisse -1 ?

**b)** Etudier la dérivabilité de $f$ en 3. Que peut-on dire de la tangente à ( $\mathscr{C}$ ) au point d'abscisse 3 ?

**2°-** Déterminer $f'(x)$ , et montrer que $f'(x) = \frac{2(-x^2+x+2)}{\sqrt{3+2x-x^2}}$ , $\forall x \in ]-1;3[$.

**3°-** Déterminer les variations de la fonction $f$ et dresser son tableau de variations sur $[-1;3]$ .